Exercice 1 (4 points)

Soit f une fonction continue sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ vérifiant f(0) = 0 et dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variations de f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	1

Dans chaque question une seule réponse est exacte. Donner son numéro et la lettre correspondante.

1. L'équation f(x) = 0

A	B	C
n'admet aucune solution	admet exactement une solution	admet deux solutions

2. Soit a un réel fixé de l'intervalle] 1 ; 4[, l'équation f(x) = a

A	B	C
admet exactement une seule solution	admet exactement deux solutions	admet exactement trois solutions

3. La courbe représentative de f

A	B	C
admet une seule asymptote	admet exactement trois asymptotes	admet deux asymptotes verticales

4. L'image de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par f est

A	B	C
[0 ; 1[	[0, 4]	]1,4]

Exercice 2 (3 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a) Montrer que, pour tout x réel, $1 \le 2-\cos x \le 3$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-\cos x}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x.\cos x$.

   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n\pi$.

   a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $f(u_{2n})=2n\pi$ et $f(u_{2n+1})=-(2n+1)\pi$.

   b) La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\frac{1}{3}\left(x^2-2x+4\right)$.

1. a) Etudier les variations de f.
   b) En déduire que : si x appartient à l'intervalle]1, 4[alors f(x) appartient à]1, 4[.
2. Soit la suite (v_n) définie par : $v_0=3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)$.
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $1<v_n<4$.
   b) Prouver que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{3}(v_n-1)(v_n-4)$.
   c) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Exercice 4 (4 points)

1. Déterminer z_1 et z_2 les racines carrées du nombre complexe 8i.
2. a) Déterminer les nombres complexes b et c tels que pour tout complexe z, on ait :
   $$z^3-3iz^2-8iz-24=(z-3i)\left(z^2+bz+c\right).$$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3-3iz^2-8iz-24=0$.
   c) Vérifier que la somme des solutions de (E) est imaginaire pure et que leur produit est réel.

Exercice 5 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – 1. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1. Soit M un point du plan complexe privé de O d'affixe z = $1+e^{2i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Calculer le module de (z - 1). En déduire que M appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
2. Montrer que, pour tout réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $z=2\cos\theta.e^{i\theta}$.
3. Soit M' le point d'affixe z' telle que $z'=\frac{1}{2\cos\theta}e^{i(\pi+\theta)}$.
   a) Montrer que les points O, M et M´ sont alignés.
   b) Prouver que |z' + 1| = |z'| puis en déduire que M' décrit une droite (D) que l'on déterminera.
4. On suppose que $\theta=\frac{3\pi}{8}$, placer les points A, B, M et M' dans le plan complexe .
(On prendra 2 cm pour unité graphique).

Exercice 1 : (4 points)

1. B ; 2. C ; 3. B ; 4. B

Exercice 2 : (3 points)

1. a) Pour tout x réel , $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2-\cos x \leq 3$.

   b) Pour tout x réel , $2-\cos x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$.

   D'où pour tout x >0, $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2-\cos x} \leq x$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x} = +\infty$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$,

   $f(u_{2n}) = 2n\pi\cos(2n\pi) = 2n\pi$ et

   $f(u_{2n+1}) = (2n+1)\pi \cos((2n+1)\pi) = (2n+1)\pi.\cos\pi = -(2n+1)\pi$

   b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_{2n}) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_{2n+1})$

   donc la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3 : (4 points)

1. a) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 = +\infty$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, f'(x) = $\frac{2}{3}(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   b) Comme f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors :

   $1 < x < 4 \Rightarrow f(1) < f(x) < f(4) \Leftrightarrow 1 < f(x) < 4$.

2. a) On a : $v_0 = 3$ donc $1 < v_0 < 4$.

   On suppose que : $1 < v_n < 4$, où $n \in \mathbb{N}$, et on montre que $1 < v_{n+1} < 4$.

   $v_n \in]1,4[\Rightarrow f(v_n) = v_{n+1} \in]1,4[$.

   On conclue: pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 < v_n < 4$.

   b) Pour tout n de $\mathbb{N}$,

   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(v_n^2 - 2v_n + 4) - v_n = \frac{1}{3}(v_n^2 - 5v_n + 4) = \frac{1}{3}(v_n - 1)(v_n - 4)$.

   c) Comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \in]1,4[$ alors $v_{n+1} - v_n < 0$; il en résulte que la suite (v_n) est décroissante. Or la suite (v_n) est minorée par 1 , alors la suite (v_n) est convergente.

Remarquer que dans l'énoncé du devoir, la limite de la suite (v_n) n'est pas demandée.

Cependant, commet répondre à la question si elle était posée ?

Soit ℓ la limite de la suite (v_n), l vérifie : $1 \leq \ell \leq 4$ et $\ell = f(\ell)$.

L'équation $\ell = f(\ell)$ est équivalente à l'équation $\ell^2 - 5\ell + 4 = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = 4$.

D'autre part , la suite (v_n) es décroissante donc (v_n) est majorée par son premier terme v_0.

Par suite : pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leq v_0 \Leftrightarrow v_n \leq 3$. Il en résulte que : $1 \leq \ell \leq 3$.

On conclue que : $\ell = 1$.

Exercice 4 : (4 points)

1. $8i = 4.2i = 2^2(1+i)^2 = (2+2i)^2$ donc les racines carrées de 8i sont $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = -2-2i$.

   NB : il en y'a bien d'autre méthode.

2. a) $z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z-3i)(z^2+bz+c) \quad = z^3 + (b-3i)z^2 + (c-3ib)z - 3ic$

   D'où $\begin{cases} b-3i = -3i \\ c-3ib = -8i \\ -3ic = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -8i \end{cases}$

   b) (E) $\Leftrightarrow (z-3i)(z^2-8i) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z^2 = 8i \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = 2+2i$ ou $z = -2-2i$.

   Ainsi l'ensemble de solutions de l('équation (E) est $\{3i, 2+2i, -2-2i\}$.

   c) $3i + 2 + 2i + -2 - 2i = 3i$ et $3i(2+2i)(-2-2i) = 24$

Exercice 5 : (5 points)

1. $|z-1| = |e^{2i\theta}| = 1$ par conséquent AM = 1 donc M∈ ($\mathcal{C}$).

2. Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $z = 1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$.

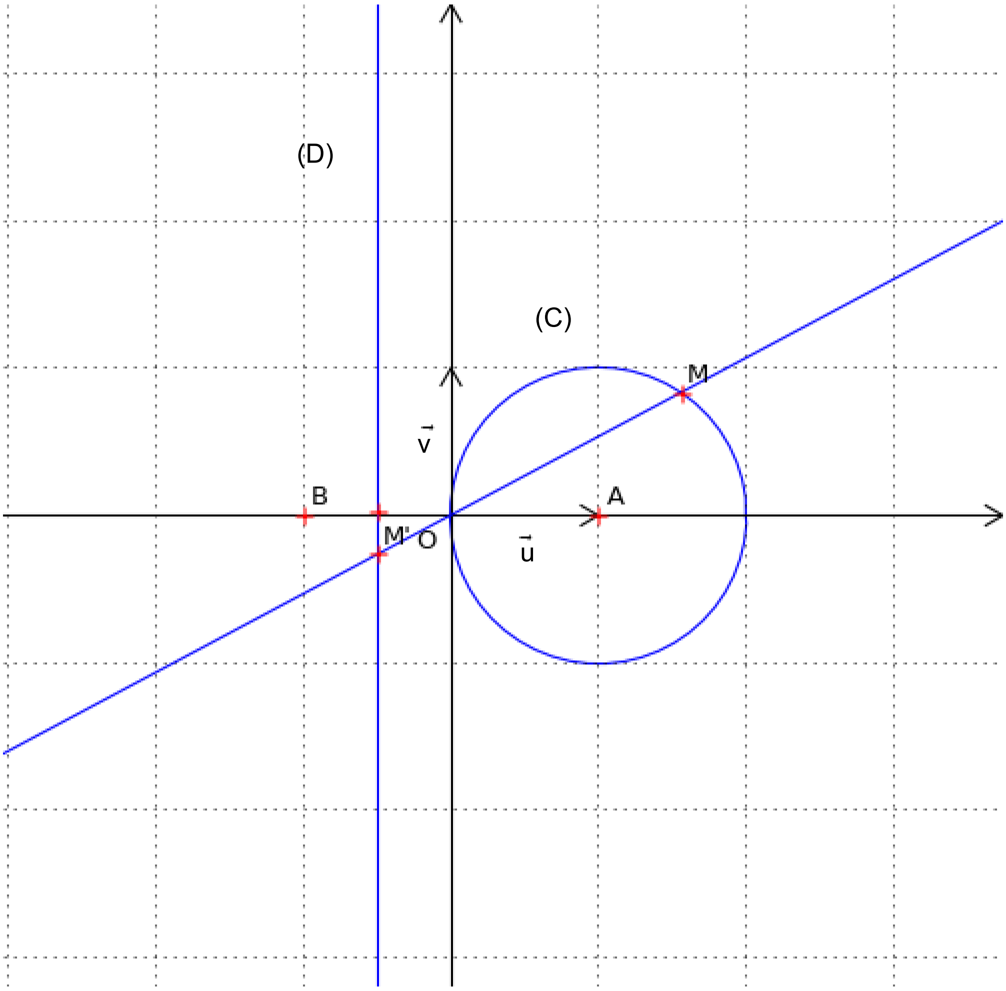
3. a) $\frac{z'}{z} = \frac{1}{4\cos^2\theta} \frac{e^{i(\theta+\pi)}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{4\cos^2\theta} e^{i\pi} = -\frac{1}{4\cos^2\theta}$ donc $\frac{z'}{z}$ est réel par suite les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires d'où les points O ,M et M' sont alignés.

   b) $|z'+1| = \left|-\frac{e^{i\theta}}{2\cos\theta} + 1\right| = \left|\frac{-e^{i\theta} + 2\cos\theta}{2\cos\theta}\right| = \left|\frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta}\right| = \frac{1}{2\cos\theta} = |z'|$

   D'où BM' = OM' donc M décrit la médiatrice (D) du segment [OB].

4. Si $\theta = \frac{3\pi}{8}$ alors $z = 1 + e^{3i\frac{\pi}{4}}$ d'où arg(z – 1) $\equiv \arg\left(e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

   $\{M'\} = (OM) \cap D$.


(D)
(C)
M
$\vec{v}$
B
A
M'
O
$\vec{u}$